

## Ejercicios de evaluación del curso

### Programación lineal

#### Simplex

1. Resolver con todas las iteraciones:

$$\min Z = 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 8x_4$$

*Sujeto a:*

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 40$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 8$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

2. Una tienda de abarrotes necesita decidir cuántas cajas de cinco tipos de cereales para el desayuno deben estar presentes en el anaquel cada día, con el objetivo de maximizar las ganancias. Sin embargo, hay ciertas restricciones que deben respetarse:

Demandas máximas: Cada tipo de cereal tiene una demanda máxima diaria, es decir, no se puede colocar más de un cierto número de cajas por día en el anaquel:

- Cereal 1: 100 cajas
- Cereal 2: 85 cajas
- Cereal 3: 140 cajas
- Cereal 4: 80 cajas
- Cereal 5: 90 cajas

Espacio de anaquel: El espacio total disponible en el anaquel es de 5000 pulgadas cuadradas. Cada tipo de cereal ocupa una cantidad diferente de espacio por caja:

- Cereal 1: 16 pulgadas cuadradas por caja
- Cereal 2: 24 pulgadas cuadradas por caja
- Cereal 3: 18 pulgadas cuadradas por caja
- Cereal 4: 22 pulgadas cuadradas por caja
- Cereal 5: 20 pulgadas cuadradas por caja

Utilidad por caja: Cada tipo de cereal genera una ganancia diferente por cada caja vendida:

- Cereal 1: \$1.10 por caja
- Cereal 2: \$1.30 por caja
- Cereal 3: \$1.08 por caja
- Cereal 4: \$1.25 por caja
- Cereal 5: \$1.20 por caja

Cantidad mínima en el anaquel: Para asegurar una presencia significativa de cada tipo de cereal, se requiere que haya al menos 15 cajas de cada cereal en el anaquel.

Objetivo:

Maximizar la utilidad total, respetando las restricciones de espacio y demanda.

Desarrolle la función objetivo y restricciones, realice los cálculos.

Corrobore los resultados con el uso de un solver.

### Simplex Dual

#### 3. Optimización en una empresa de fabricación

Una empresa fabrica dos productos (P1 y P2) y desea maximizar sus ganancias. La ganancia por cada unidad de P1 es de \$40 y por cada unidad de P2 es de \$30. Las restricciones de recursos son las siguientes:

Tiempo de producción:  $2x_1 + x_2 \leq 12$  horas.

Material disponible:  $x_1 + x_2 \leq 8$  unidades.

Demanda máxima del producto P1:  $x_1 \leq 5$ .

Formule y resuelva el problema de maximización utilizando el método simplex dual para el caso en que se agregue una cuarta restricción de recursos en la que la empresa debe producir al menos 10 unidades combinadas de P1 y P2, es decir,  $x_1 + x_2 \geq 10$ .

#### 4. Minimización de costos en distribución

Una empresa desea minimizar el costo de distribución de dos productos a tres diferentes ciudades. Los costos de distribución por unidad son de \$3 para la ciudad A, \$4 para la ciudad B y \$2 para la ciudad C. Las restricciones son las siguientes:

La demanda en la ciudad A es al menos 40 unidades.

La demanda en la ciudad B es al menos 50 unidades.

La demanda en la ciudad C es al menos 30 unidades.

Formule el problema de minimización con estas restricciones y utilice el método simplex dual para resolverlo en el caso en que el suministro total disponible de producto sea de 100 unidades.

#### 5. Optimización de recursos en una cadena de suministro

Una compañía de alimentos procesa dos productos (P1 y P2) usando dos tipos de recursos (R1 y R2). Cada unidad de P1 requiere 2 unidades de R1 y 1 unidad de R2, mientras que cada unidad de P2 requiere 1 unidad de R1 y 3 unidades de R2. La compañía tiene un total de 10 unidades de R1 y 12 unidades de R2 disponibles y desea maximizar su producción combinada.

Formule y resuelva problema utilizando el método simplex dual para el caso en que se agregue una restricción de demanda que indique que se deben producir al menos 3 unidades de P1 y al menos 4 unidades de P2.

Programación no lineal ,no restringida

6. Problema 1:

Sea la siguiente función objetivo:

$$f(t) = (125 - 50t + 5t^2) \frac{100}{[1 + 0.5(1.5t^{-3})(0.25)]^4}$$

Utilice el intervalo de búsqueda en  $t$  (0.1, 2)

7. Problema 2:

Sea la siguiente función objetivo:

$$\max f = \tan(50^\circ) x - \frac{9.81}{1250 \cos^2(50^\circ)} x^2 + 1$$

Utilice el intervalo de búsqueda en  $x$  (0, 60)

8. Problema 3:

Sea la siguiente función dada:

$$\min f(X) = -8x_1 + x_1^2 + 12x_2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2$$

Utilice como  $X^0 = \{-4, 5\}$

9. Problema 4:

Sea la siguiente función dada:

$$\max f(X) = -2.25x_1x_2 - 1.75x_2 + 1.5x_1^2 + 2x_2^2$$

Utilice como  $X^0 = \{-5, 7\}$

Programación no lineal, restringida

10. Problema

$$\begin{aligned} f_1(X) &= 2.3719 + \ln x_1 \\ f_2(X) &= -23.1441 + \ln x_2 \end{aligned}$$

$$f_3(X) = -24.0847 + \ln x_3$$

$$f_4(X) = -47.6052 + \ln x_4$$

$$f_5(X) = \ln x_5$$

Sujeto a:

$$h_k(X) = \frac{a_{i,k}}{8314}$$

$$a_{i,k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$g_1(X) = x_1 + x_3 + x_4 - \frac{2}{x_6} = 0$$

$$g_2(X) = 4x_1 + 2x_2 + 2x_5 - \frac{14}{x_6} = 0$$

$$g_3(X) = 4x_1 + 2x_2 + x_5 - \frac{3}{x_6} = 0$$

$$g_4(X) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 1 = 0$$

Entropia

11. Problema:

Una bolsa contiene fichas de 3 colores:

- 50% son rojas,
- 30% son azules,
- 20% son verdes.

¿Cuál es la entropía de este sistema?

12. Problema:

Considere una variable aleatoria  $x$  que sigue una distribución uniforme en el intervalo dado de  $[0,10]$ . Calcule la entropía diferencial.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

13. Problema:

Un alfabeto tiene 26 letras y todas son igualmente probables. ¿Cuál es la entropía máxima?

	<b>1er Examen Parcial</b> de la UA de Matemáticas Avanzadas-LCD 2025-II *	
Apellidos: _____ Nombre: _____	Grupo: 5AM1	Profra. Leonor VG

**Instrucciones para el examen.** Debe de resolver correctamente todos los ejercicios, justificando todos sus procedimientos; si usa alguna metodología distinta a la vista en clase, deberá mostrar la equivalencia matemática para que el ejercicio sea válido. Debe guardar y silenciar y guardar su celular. Se permite el uso de calculadora. Valor máximo del examen: 10 puntos.

## PARTE A

1. [1.5 pts] Solo hacer **UNO** de los incisos (a) o (b).

<p>(a) Calcule el siguiente determinante, usando <b>solamente</b> propiedades de los determinantes para transformar a matriz triangular superior (no es necesario tener unos en la diagonal).</p> $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$	<p>(b) Calcular todas las soluciones básicas del siguiente sistema de ecuaciones y diga cuáles son factibles [solo reporte los resultados que arroja la calculadora]</p> $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$
---	---

2. [1.5 pts] Justifique la solución (si hay) del PPL de la tabla de abajo: es no acotado, es infactible, tiene solución única (exhibir la solución) o tiene solución múltiple (exhibir dos soluciones)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	LD
0	0	-2	0	-10
1	2	0	0	5
0	3	-3	1	10

Para los ejercicios 3 y 4, considere el PPL de la derecha:

3. (3.5 pts) Resolver por el método gráfico.  
4. (3.5 pts) Resolver el problema por el método de las 2 fases.

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s. a } &x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ &x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ &3x_1 + x_2 \geq 3 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## PARTE B

Un taller confecciona los uniformes de los niños varones de una primaria. Para hacer un suéter, se necesitan 1m de tela y 2 botones; y para hacer unos pantalones, hacen falta 2m de tela, 1 botón y 1 cierre. El taller dispone de 500 m de tela, 400 botones y 225 cierres. El beneficio que se obtiene por la venta de un suéter es de \$250, y por la venta de unos pantalones es de \$300. Se asume que se vende todo lo que se fabrica. El número de suéteres y de pantalones que se tienen que fabricar para obtener un beneficio máximo se encuentra en la tabla final de la solución del simplex, dada abajo.

$\begin{aligned} \min z &= -250x_1 - 300x_2 \\ \text{s. a } \quad x_1 + 2x_2 &\leq 500 \\ \quad \quad 2x_1 + x_2 &\leq 400 \\ \quad \quad \quad x_2 &\leq 225 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$	<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>-350/3</td><td>-200/3</td><td>0</td><td>-85000</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>-1/3</td><td>2/3</td><td>0</td><td>100</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>-2/3</td><td>1/3</td><td>1</td><td>25</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>2/3</td><td>-1/3</td><td>0</td><td>200</td></tr></table>	0	0	-350/3	-200/3	0	-85000	1	0	-1/3	2/3	0	100	0	0	-2/3	1/3	1	25	0	1	2/3	-1/3	0	200
0	0	-350/3	-200/3	0	-85000																				
1	0	-1/3	2/3	0	100																				
0	0	-2/3	1/3	1	25																				
0	1	2/3	-1/3	0	200																				

Resolver lo que se solicita a continuación.

1. Plantear los problemas (P) y (D) en su forma canónica y use el Teorema de Holgura Complementaria para calcular la solución del dual.
2. Realizar el análisis de sensibilidad del lado derecho solamente para  $b_1$ .
3. Realizar el análisis de sensibilidad del costo  $\hat{c}_1$  y  $\hat{c}_3$ .
4. Realizar el análisis de sensibilidad al añadir una variable correspondiente a la elaboración de un nuevo producto:  $x_6 = \#faldas$ , para lo cual se necesitan 1.5m de tela, 1 botón y 1 cierre, reportando un beneficio de \$275. ¿Vale la pena la introducción de este nuevo producto?

	<b>2o Examen Parcial</b> de la UA de Matemáticas Avanzadas-LCD, 2025-II*	 Dra. Leonor VG
Apellidos: _____ Nombre: _____	Grupo: 5AM1	

**Instrucciones para el examen.** Debe de resolver correctamente todos los ejercicios, justificando todos sus procedimientos; si usa alguna metodología distinta a la vista en clase, deberá mostrar la equivalencia matemática para que el ejercicio sea válido. Debe guardar y silenciar y guardar su celular. Se permite el uso de calculadora. Valor máximo del examen: 10 puntos. Elija 4 problemas, tache el que NO va a resolver.

1. Diga si la siguiente función es cóncava o convexa:  $f(x, y) = (x + 2)^4 + y^4$ . Hallar sus puntos críticos y su naturaleza.
2. Realice una aproximación por polinomio de Maclaurin de orden 2 de la función:  $f(x, y) = e^x \sin(y)$ .
3. Use las condiciones de KKT para encontrar los puntos críticos de la función de abajo. Diga cuales de ellos son factibles, regulares y su naturaleza.  

$$\min f(x, y) = -x - y; \quad \text{s. a} \quad y = x^2; \quad y \leq x + 2.$$
4. Escriba la función cuadrática  $q(x, y) = 2x + 8y + 4x^2 - 2y^2 + 6xy$  de la forma  $q(\vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{x}^t H \vec{x} - b \vec{x}^t$ . Encuentre el óptimo (si existe) y su naturaleza.
5. Sea el PPNL  $\min f(x, y) = -x - y + 2xy + 2x^2 + y^2$ . En la iteración  $k$ , se tiene  $x_k = (-1, 1)$  y una dirección de búsqueda  $p_k = (1, 1)$ . Calcule el valor de  $\alpha$  de la búsqueda en línea exacta (analítica) [recuerde que  $\alpha = \min_{\alpha} \phi(\alpha)$ , donde  $\phi(\alpha) = f(x_k + \alpha p_k)$ ], determine  $x_{k+1}$  y calcule  $\|\nabla f(x_{k+1})\|$ .



### 3er Examen Parcial Matemáticas

Avanzadas-LCD 2024-2025-II



Apellidos: \_\_\_\_\_  
Nombre: \_\_\_\_\_

Grupo: 5AM1

Dra. Leonor VG

**Instrucciones para el examen.** Debe de resolver correctamente todos los ejercicios, justificando todos sus procedimientos; si usa alguna metodología distinta a la vista en clase, deberá mostrar la equivalencia matemática para que el ejercicio sea válido. Debe guardar y silenciar y guardar su celular. Se permite el uso de calculadora. Valor máximo del examen: 10 puntos.

#### PARTE A [elegir exactamente uno de los siguientes dos problemas]

- Un PPNL tiene el siguiente conjunto de restricciones  $3x - 2y = 4$ ;  $x^2 + y^2 \leq 5$ ;  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ . (a) Esboce la región factible (abajo) y obtenga un punto inicial (interior) factible  $x_0$ . (b) Diga cuales restricciones son activas y cuáles no en el punto que eligió  $x_0$ . (c) Diga cuál de los métodos iterativos puede aplicar (penalización y/o barrera).
- Suponga un dado de 4 caras (tetraedro) se ha roto de una esquina. Luego de muchos experimentos se ha obtenido que  $E[X] = 2.9$ . Desarrolle la ecuación final que se tiene que resolver en función de la constante  $\lambda_1$ , para obtener la distribución de probabilidad de este dado (si puede, resuelva la ecuación resultante en la calculadora).

#### PARTE B [Hacer tres de los siguientes 4 ejercicios]

- La probabilidad conjunta de dos fuentes de comunicación  $A$  y  $B$  (dos v.a.) se describe en la tabla de abajo. Determine:  $H(X)$ ,  $H(Y)$ ,  $H(XY)$ ,  $H(X|Y)$ ,  $H(Y|X)$ ,  $I(X; Y)$  y  $D(p||q)$  (si es posible).

		X		
		1	2	3
Y	0	0.32	0.03	0.01
	1	0.06	0.24	0.02
	2	0.02	0.03	0.27

- Desarrolle la expresión para la entropía diferencial  $h_e(X)$  en base  $e$  (nats), para una variable aleatoria exponencial  $X$  con f.d.p. dada por  $f(x) = \frac{1}{6} e^{-\frac{1}{6}x}$ ,  $x \geq 0$ . **Hint:** use los resultados conocidos de media y varianza de esta distribución para evitar calcular directamente las integrales que salen.
- Reduzca la siguiente expresión:  $I(X; Z|Y) - I(Z; Y|X) + I(Z; Y) - I(X; Z) + H(X|Y)$ , de modo que solo aparezcan al final, entropías conjuntas o individuales y quizás individuales (NINGUNA entropía condicional).
- Encontrar la fdp  $f(x)$  con distribución de entropía máxima, si se asume que  $x \in (-\infty, \infty)$ ;  $E[X] = 0$ ,  $E[X^2] = 4$  (use solo una restricción).